

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНАЯ ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ

Известия Балтийской государственной академии
рыбопромышленного флота. 2026. № 1(75). С. 210–214

Научная статья

УДК 372.851

Doi:10.46845/2071-5331-2026-1-75-210-214

Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности: от фундаментальных основ алгебры к методическому инструментарию будущего учителя математики

Елена Евгеньевна Алексеева¹, Елизавета Артемовна Сильнова²

^{1,2}Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

¹eealekseeva@kantiana.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4529-2794>

²easilnova@stud.kantiana.ru

Аннотация. Представлено детальное исследование трёх фундаментальных алгебраических законов: коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности в контексте подготовки преподавателя математики. Подчёркивается, что глубина усвоения указанных законов определяет способность педагога формировать у школьников подлинное алгебраическое мышление. Посредством анализа математической природы каждого закона, области его применения и ограничений раскрывается, как изучение этих законов преобразует предметное знание студента педагогического вуза в эффективный методический инструмент.

Ключевые слова: коммутативный закон, ассоциативный закон, дистрибутивный закон, свойства операций, алгебраическая структура, профессиональная компетентность учителя, математическое мышление, диагностика ошибок

Для цитирования: Алексеева, Е. Е., Сильнова, Е. А. Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности: от фундаментальных основ алгебры к методическому инструментарию будущего учителя математики // Известия Балтийской государственной академии рыбопромышленного флота. – 2026. – № 1(75). – С. 210–214.

Современная парадигма педагогического образования требует от будущего учителя не только владения предметным содержанием, но и понимания его логико-методологических основ, а также умения транслировать данное понимание ученикам. Наиболее показательным примером разрыва между формальным знанием и его глубинным осмыслением выступают три базовых алгебраических закона: коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

В сознании многих студентов-педагогов они остаются заученными в начальной школе «свойствами сложения и умножения», не образующими целостной системы и не имеющими чётких границ применимости.

Подобное положение ведёт к профессиональной беспомощности, когда преподаватель не может аргументированно объяснить [5], например, почему неверно равенство $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$, ограничиваясь указанием «так нельзя, запомни».

Значимость углубленного изучения названных законов в педагогическом вузе обусловлена их особым статусом. Они представляют минимальный набор принципов, который, с одной стороны, структурирует всю элементарную математику, а с другой – служит источником наиболее устойчивых и массовых ошибок учащихся.

Понимание сути законов позволяет учителю видеть за множеством частных случаев общие закономерности и, соответственно, выстраивать обучение не как передачу суммы правил, а как формирование системы понятий.

Системное и философски осмысленное рассмотрение законов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности составляет ядро формирования предметно-методической компетентности будущего учителя математики [6].

Представляем развернутое математическое и толкование каждого закона, также показано, как данные законы, будучи рассмотрены в качестве системы, служат основой для классификации и анализа типичных учебных трудностей.

Углубленное профессиональное понимание начинается с четкого различения интуитивного представления о законе и его строгой математической роли как аксиомы, определяющей структуру. Рассмотрим каждый закон по отдельности.

Коммутативный закон сложения утверждает: от перемены мест слагаемых сумма не меняется (1.1).

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a, \quad (1.1)$$

Практическая проверка этого закона проста (1.2):

$$2 + 3 + 1 = 3 + 1 + 2 = 6, \quad (1.2)$$

Сумма трех величин посчитанная справа налево, слева направо, а затем и произвольно смешанная, неизменно приводит к тому же результату.

Коммутативный закон умножения формулируется аналогично: от перемены мест сомножителей произведение не меняется (2.1, 2.2).

$$a \times b \times c = a \times c \times b = b \times a \times c = b \times c \times a = c \times a \times b = c \times b \times a, \quad (2.1)$$

$$2 \times 3 \times 5 = 5 \times 2 \times 3 = 30, \quad (2.2)$$

Результат не зависит от того, какой элемент является «первым», а какой «вторым». Для сложения и умножения чисел свойство настолько естественно, что часто воспринимается как неотъемлемая черта любой «операции».

Ключевой педагогический вывод заключается в том, что коммутативность представляет собой скорее исключение, нежели правило в мире математических операций. Закон отражает идею независимости от порядка там, где порядок не несёт семантической нагрузки, например, при объединении множеств или сложении длин. Однако там, где порядок принципиален, операция становится некоммутативной.

Границы действия закона иллюстрируются классическими контрпримерами: вычитание ($5 - 3 \neq 3 - 5$) и деление ($12/4 \neq 4/12$). Более сложные и важные для учителя примеры включают:

- Умножение матриц: для матриц A и B, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- Композиция функций: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, как правило, не равна $(g \circ f)(x)$.
- Векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (антикоммутативность).

Следовательно, коммутативность – не «свойство арифметики», а частный случай симметрии, требующий доказательства для каждой новой операции. Для учителя это означает необходимость прививать ученикам не привычку менять местами, а привычку задаваться вопросом: «Допустимо ли в данной ситуации менять порядок?».

Ассоциативный закон, как и коммутативный, работает относительно сложения и умножения и имеет две формулировки: значение суммы не зависит от того, как сгруппированы слагаемые; произведение не зависит от того, как сгруппированы сомножители (3.1, 3.2).

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (3.1)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \quad (3.2)$$

Ассоциативность лежит в основе возможности алгоритмизации. Благодаря ей существуют однозначные алгоритмы сложения и умножения многозначных чисел, допустимо группировать слагаемые или множители для упрощения вычислений. Ассоциативность также является необходимой аксиомой для определения алгебраической структуры группы.



Границы действия закона становятся очевидны при его нарушении, что делает операцию «хрупкой» и требующей явного указания порядка. Контрпримеры:

– Вычитание: $(10 - 5) - 2 = 3$, но $10 - (5 - 2) = 7$.

– Деление: $(12/6)/2 = 1$, но $12/(6/2) = 4$.

– Возведение в степень: $(2^3)^2 = 8^2 = 64$, но $2^{3^2} = 2^9 = 512$. Степень не ассоциативна.

Отсюда следует, что ассоциативность – это привилегия, а не общее право. Учителю важно подчеркивать, что возможность опускать скобки в выражениях типа $a-b-c$ основана на соглашении о порядке вычислений слева направо, а не на действии ассоциативного закона.

Данный закон – единственный из рассматриваемых – связывает две различные операции, обычно сложение (+) и умножение (×). Если выражение состоит из произведения суммы слагаемых на сомножитель, то результат равен сумме произведений каждого слагаемого на сомножитель (4.1, 4.2).

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c, \quad (4.1)$$

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c, \quad (4.2)$$

Сущность закона состоит в описании того, как одна операция распределяется относительно другой. Закон формализует процедуры раскрытия скобок, когда умножение «проникает» внутрь суммы, и вынесения общего множителя как обратной операции. Дистрибутивность обеспечивает «проницаемость» одной структуры для действия другой.

Дистрибутивный закон выступает краеугольным камнем всех алгебраических преобразований. Он лежит в основе умножения многочленов, разложения на множители, решения уравнений. Именно в данной области сосредоточено большинство ошибок. Дистрибутивность – конкретное отношение между конкретными операциями. Её нельзя автоматически распространять на другие пары.

– Ложное обобщение на возведение в степень относительно сложения: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Ошибка возникает из-за непонимания, что возведение в квадрат – не умножение на 2, а частный случай умножения $(a + b) \times (a + b)$, где дистрибутивность применяется корректно, порождая три слагаемых.

– Ложное обобщение на логарифмы и тригонометрию: $\log(a + b) = \log a + \log b$ или $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$. Ученик интуитивно пытается «распределить» внешнюю функцию на слагаемые, но ни логарифм, ни синус не являются операциями умножения, и дистрибутивный закон к ним неприменим.

– Нарушение дистрибутивности справа/слева для некоммутативных операций: векторное произведение дистрибутивно, но $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, при этом порядок в правой части менять нельзя.

Итак, дистрибутивность – это специфическое соглашение между двумя операциями. Учителю необходимо постоянно акцентировать, что применение закона требует явной проверки: «Распределяет ли данная операция относительно другой?».

Глубокое понимание законов, рассмотренное выше, непосредственно преобразуется в профессиональные умения учителя.

Учитель, вооружённый знанием данной триады, получает четкую классификационную схему. Ошибка $5 - 3 = 3 - 5$ представляет собой нарушение гипотезы о коммутативности вычитания. Ошибка $10 - 5 - 2 = 10 - (5 - 2)$ есть нарушение гипотезы об ассоциативности. Ошибка $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ является ложным обобщением дистрибутивности. Подобный подход позволяет перейти от констатации факта ошибки к целенаправленной коррекции, воздействуя не на симптом, а на причину – ложную индуктивную гипотезу ученика.

Вместо авторитарного запрета учитель может строить объяснение как исследование [7]. «Проверим гипотезу, что $\sin(x + y)$ равен $\sin x + \sin y$. Возьмём конкретные значения: $x = 30^\circ, y = 60^\circ$. Левая часть: $\sin(90^\circ) = 1$. Правая: $0.5 + \sqrt{3}/2 \approx 1.366$. Значения не совпадают! Следовательно, гипотеза о том, что синус «распределяется» относительно сложения, неверна. Синус – не умножение, для него действуют иные законы». Подобное объяснение формирует научный стиль мышления.

Знание законов позволяет учителю видеть преемственность тем [8]. Коммутативность и ассоциативность, введённые в начальной школе для чисел, позже проверяются для операций с одночленами, многочленами, векторами, матрицами. Дистрибутивность, изучаемая как свойство умножения числа на сумму, становится основой для умножения многочлена на многочлен. Учитель в состоянии прямо указывать на эту связь, укрепляя целостность математической картины мира у ученика.

Детальное рассмотрение законов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности в рамках профессиональной подготовки учителя математики представляет собой не углубление в абстрактную теорию, а вклад в практическую эффективность. Указанные законы образуют минимально достаточную концептуальную систему, которая:

- Структурирует предметное знание учителя, преобразуя его из набора фактов в логичную сеть.

- Вооружает точным диагностическим и объяснительным инструментарием для работы с наиболее распространёнными когнитивными трудностями учащихся.

- Формирует у будущих педагогов принципиально важную установку: любое математическое утверждение, даже кажущееся очевидным, обладает своей областью применимости и нуждается в осмыслении либо проверке [5].

Следовательно, интеграция философско-методологического анализа данных законов в курсы алгебры, элементарной математики и, особенно, методики преподавания должна стать обязательным элементом современной программы педагогического вуза. Учитель, ясно видящий «скелет» алгебры, состоящий из трёх указанных опор, способен научить своих учеников не бояться математики, а понимать её внутреннюю гармонию и логику.

Список источников

1. Алексеева, Е. Е. Авторская идея концепции формирования математической компетентности будущих учителей математики и информатики / Е. Е. Алексеева // Известия Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота: психолого-педагогические науки. – 2019. – № 2(48). – С. 154–155. – EDN DBLPVK.

2. Алексеева, Е. Е. Формирование культуры мышления учащихся в обучении математике / Е. Е. Алексеева // Электронные библиотеки. – 2019. – Т. 22. – № 5. – С. 308–324. – DOI:10.26907/1562-5419-2019-22-5-308-324. – EDN LKJJQH.

3. Берсенева, О. В., Бекешева, И. С. Ожидания и последствия: анализ типичных ошибок выпускников 9-го класса при выполнении заданий основного государственного экзамена по математике и пути их предупреждения // Вестник ХГУ им. Н. Ф. Катанова. 2022. – № 2 (40). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ozhidaniya-i-posledstviya-analiz-tipichnyh-oshibok-vypusknikov-9-go-klassa-pri-vypolnenii-zadaniy-osnovnogo-gosudarstvennogo> (дата обращения: 15.01.2026).

4. Вечтомов, Е. М. Нерешенные проблемы российского математического образования / Е. М. Вечтомов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2019. – № 21. – С. 25–36. – EDN WZQGXH.

5. Глухов, М. М., Елизаров, В. П., Нечаев, А. А. Алгебра : учебник. – 2е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2015. – 608 с.

6. Далингер, В. А. Причины типичных ошибок обучающихся в процессе изучения элементов математического анализа // Sciences of Europe. – 2016. – № 2-2 (2). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prichiny-tipichnyh-oshibok-obuchayuschih-sya-v-protse-izucheniya-elementov-matematicheskogo-analiza> (дата обращения: 15.01.2026).

7. Жакиенова, А. А. Формирование профессионально-ценностных установок будущих учителей естественнонаучного цикла / А. А. Жакиенова, М. А. Скиба // Проблемы подготовки учителей математики, информатики и предметов естественнонаучного цикла : сборник статей участников Международной научно-методической конференции, Нижний Новгород, 19–20 ноября 2024 года. – Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2024. – С. 24–30. – EDN WZAVIP.

8. Зеленский, А. С. Как использовать некорректные решения в преподавании математики // Школьные технологии. – 2011. – № 2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kak-ispolzovat-nekorrektnye-resheniya-v-prepodavanii-matematiki> (дата обращения: 15.01.2026).

9. Темербекова, А. А. Методика обучения математике : учебное пособие для вузов / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2015. – 510 с.



10. Яценко, И. В., Семенов, А. В., Высоцкий, И. Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике // Педагогические измерения. – 2020. – № 3. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-rekomendatsii-dlya-uchiteley-podgotovlennye-na-osnove-analiza-tipichnyh-oshibok-uchastnikov-ege-2020-goda-po> (дата обращения: 15.01.2026).

References

1. Alekseeva, E. E. The author's idea of the concept of forming mathematical competence for future teachers of mathematics and computer science / E. E. Alekseeva // *Izvestiya of the Baltic State Academy of the Fishing Fleet: psychological and pedagogical sciences*. – 2019. – № 2(48). – Pp. 154–155. – EDN DBLPVK.
2. Alekseeva, E. E. Formation of students' thinking culture in teaching mathematics / E. E. Alekseeva // *Electronic Libraries*. – 2019. – Vol. 22. – № 5. – Pp. 308–324. – DOI:10.26907/1562-5419-2019-22-5-308-324. – EDN LKJJQH.
3. Berseneva, O. V., Bekesheva, I. S. Expectations and consequences: analysis of typical mistakes of 9th grade graduates when completing tasks of the Main State Exam in mathematics and ways to prevent them // *Bulletin of KhSU named after N. F. Katanov*. – 2022. – № 2 (40). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ozhidaniya-i-posledstviya-analiz-tipichnyh-oshibok-vypusknikov-9-go-klassa-pri-vypolnenii-zadaniy-osnovnogo-gosudarstvennogo> (accessed: 15.01.2026).
4. Vechtomov, E. M. Unsolved problems of Russian mathematical education / E. M. Vechtomov // *Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Universities of the Volga-Vyatka Region*. – 2019. – № 21. – Pp. 25–36. – EDN WZQGXH.
5. Glukhov, M. M., Elizarov, V. P., Nechaev, A. A. *Algebra: Textbook*. – 2nd ed., rev. and suppl. – St. Petersburg : "Lan" Publishing House, 2015. – 608 p.
6. Dalinger, V. A. Causes of typical student errors in the process of studying elements of mathematical analysis // *Sciences of Europe*. – 2016. No.2-2 (2). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prichiny-tipichnyh-oshibok-obuchayushchisya-v-protseesse-izucheniya-elementov-matematicheskogo-analiza> (accessed: 15.01.2026).
7. Zhakienova, A. A. Formation of professional value orientations of future teachers of the natural science cycle / A. A. Zhakienova, M. A. Skiba // *Problems of training teachers of mathematics, computer science and natural science subjects : collection of articles of participants of the International Scientific and Methodological Conference, Nizhny Novgorod, November 19–20, 2024*. – Nizhny Novgorod : National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 2024. – Pp. 24–30. – EDN WZAVIP.
8. Zelensky, A. S. How to use incorrect solutions in teaching mathematics // *School Technologies*. – 2011. – № 2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kak-ispolzovat-nekorrektnye-resheniya-v-prepodavanii-matematiki> (accessed: 15.01.2026).
9. Temerbekova, A. A. *Methods of teaching mathematics: a textbook for universities* / A. A. Temerbekova, I. V. Chugunova, G. A. Baigonakova. – St. Petersburg; Moscow; Krasnodar : Lan, 2015. – 510 c.
10. Yashchenko, I. V., Semenov, A. V., Vysotsky, I. R. Methodological recommendations for teachers, prepared based on the analysis of typical mistakes of participants in the 2020 Unified State Exam in mathematics // *Pedagogical Measurements*. – 2020. – № 3. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-rekomendatsii-dlya-uchiteley-podgotovlennye-na-osnove-analiza-tipichnyh-oshibok-uchastnikov-ege-2020-goda-po> (accessed: 15.01.2026).

Информация об авторах

Е. Е. Алексеева – кандидат педагогических наук, доцент;
Е. А. Сильнова – бакалавр.

Статья поступила в редакцию 19.01.2026; одобрена после рецензирования 24.02.2026; принята к публикации 02.03.2026.